マルチフラクタルの統計力学的定式化(ランダムなフラクタル・パターンの成長機構と統計,研究会報告)

甲元, 真人

マルチフラクタルの統計力学的定式化*

東京大学 物性研究所　甲　元　真　人

（1989年5月　受付）

1. 序

非整数のハウスドルフ次元を持つフラクタルは，近年多様な系で見いだされている．その中で，古典的カントール集合やシェルピンスキー・ガスケットなどは厳密に自己相似性を満たし，単純な生成規則を逐次的に適用することによって作ることができる（Mandelbrot (1983)）．しかし，一般の物理現象から生ずるフラクタルでは，上の例のような単純なスケーリング構造はなく，スケーリング指数のスペクトルを考えなければならない．この種のフラクタルはマルチフラクタルと呼ばれている（Halsey et al. (1986)）．

ここでは，形式的に統計力学的手法を用い，エントロピー関数とそのルジャンドル変換（例えば，Landau and Lifshitz (1969)），及び自由エネルギーを導入することにより，マルチフラクタルのスケーリング的振舞いが完全に記述できることを示そう．

2. フラクタルにおけるエントロピー関数

2.1 エントロピー関数

まずはじめに，系統的に分割することによって作られるフラクタル集合を考えよう．ある球の集合がnステップで$N(n)$個の球に分割されるとし，次のステップでそれらはそれぞれ分割され，$N(n+1)$個となるとする．特別な場合として，各々の球が毎回a個に分割されるときは簡単に，$N(n)=a^n$となる．一般に，$N(n)$はべき乗という形になる必要はないが，その場合でも，$\ln a=\lim_{n\to\infty}\{[\ln N(n)/n]\}$の極限値は存在するであろう．

さて，直径がl_iの球の分布に注目しよう．後でわかるように，l_iではなく，$\ln l_i$あるいはスケーリング変数

$$\varepsilon_i=-(\ln l_i)/n \tag{2.1}$$

の分布を考えるほうが自然である．nが大きくなると，l_iはゼロに近づくが，ε_iは有限値にとどまる．(2.1)式を$l_i=\exp(-n\varepsilon_i)$と書けば，$\varepsilon_i$は$l_i$に対するスケーリング指数となっていることがわかる．

スケーリング指数εがεと$\varepsilon+d\varepsilon$の間にある球の数を$\Omega(\varepsilon)d\varepsilon$と書けば，$n$が大きくなると次のようなスケーリング形が期待される：

$$\Omega(\varepsilon)=\exp[nS(\varepsilon)] \tag{2.2}$$

$S(\varepsilon)$をステップ数あたりのエントロピー関数と呼ぼう．(2.2)式はフラクタル集合の基本的性

---

* 本稿は，統計数理研究所 共同研究（63-共会-51）における発表に基づくものである．

「統計数理」第３７巻　第１号（１９８９）「研究詳解」より転載。

質と考えることができる．逆に言えば，あるフラクタル集合はそのエントロピー関数 $S(\varepsilon)$ によって特徴づけられる．(2.2)式はエントロピーが示量変数であるという熱力学の基礎的性質に対応している．実際，これは熱力学の存在に対する必要条件である．

2.2 エントロピー関数の計算

次式で定義される分配関数及び自由エネルギーを導入する：

$$Z(\beta)=\sum_{i=1}^{N} l_i^{\beta} = \sum_{i=1}^{N} \exp(-\beta n \varepsilon_i) \tag{2.3}$$

$$F(\beta)=\frac{1}{n}\ln Z(\beta)=\frac{1}{n}\ln\sum_{i=1}^{N}\exp(-\beta n\varepsilon_i) \tag{2.4}$$

エントロピー関数は $F(\beta)$ から求められることを示そう．(2.3) 式の和を分布 $\Omega(\varepsilon)$ を用いて ε についての積分に置き換えると，

$$Z(\beta)=\int d\varepsilon\Omega(\varepsilon)\exp(-\beta n\varepsilon) = \int d\varepsilon \exp(n[S(\varepsilon)-\beta\varepsilon]) \tag{2.5}$$

となる．n が大きい場合，(2.5)式の積分は $S(\varepsilon)-\beta\varepsilon$ の最大値によって，$\exp(n[S(\langle\varepsilon\rangle)-\beta\langle\varepsilon\rangle])$ のように書くことができる．ε の極値を $\langle\varepsilon\rangle$ と書くと，

$$\left.\frac{dS(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\langle\varepsilon\rangle}=\beta \tag{2.6}$$

を得る．ここで，$\langle\varepsilon\rangle$ は β によることに注意．自由エネルギーは (2.4)式と (2.5)式より

$$F(\beta)=S(\langle\varepsilon\rangle)-\beta\langle\varepsilon\rangle \tag{2.7}$$

のように求められる．これはルジャンドル変換にほかならない．エントロピー関数がわかると，(2.6)式及び (2.7)式から β と $F(\beta)$ を決めることができる．一方，$F(\beta)$ がわかれば，これから $S(\varepsilon)$ と $\langle\varepsilon\rangle$ を決定することができる．そのためには(2.7)式を β について微分すればよい．(2.6)式を用いると，

$$\langle\varepsilon\rangle=-dF(\beta)/d\beta \tag{2.8}$$

が得られる．(2.7)式及び (2.8)式より，エントロピー関数は次のようになる：

$$S(\langle\varepsilon\rangle)=F(\beta)-\beta(dF(\beta)/d\beta) = -\beta^2\frac{d}{d\beta}[F(\beta)/\beta] \tag{2.9}$$

このように，一旦自由エネルギーが β の関数として求められれば，(2.8)式から $\langle\varepsilon\rangle$ が，(2.9)式から $\varepsilon=\langle\varepsilon\rangle$ における $S(\varepsilon)$ が計算できるわけである．

$\langle\varepsilon\rangle$ の意味を理解するために，(2.4)式を (2.8)式に代入すると，

$$\langle\varepsilon\rangle=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\exp(-\beta n\varepsilon_i)/Z(\beta) \tag{2.10}$$

を得る．従って，$\langle\varepsilon\rangle$ は $\exp(-\beta n\varepsilon_i)=l_i^{\beta}$ に比例する確率分布に関する ε_i の平均であることがわかる．

自由エネルギーは，他の興味ある物理量に関する情報を含んでいる．例えば，以下の(2.11)式で定義されるハウスドルフ次元は，自由エネルギーがゼロとなるβ_cにほかならない．$\beta=\beta_c$では，(2.7)式は$S(\langle\varepsilon_c\rangle)=\beta_c\langle\varepsilon\rangle_c$となる．ここで，$\langle\varepsilon\rangle_c$は$\beta=\beta_c$における$\langle\varepsilon\rangle$の値である．従って，球の数$\Omega(\langle\varepsilon\rangle_c)=\exp(n\,S(\langle\varepsilon\rangle_c))$は次のようになる．

$$\Omega(\langle\varepsilon\rangle_c)=\exp[\beta_c n\langle\varepsilon\rangle_c]=\langle l\rangle_c^{-D_H} \tag{2.11}$$

ここで，$\langle l\rangle_c=\exp(-n\langle\varepsilon\rangle_c)$であり，$\langle\varepsilon\rangle_c$は$l_i$に対する代表的なスケーリング指数とみなせる．

2.3 具体例：カントール集合

古典的カントール集合は，区間［0，1］を以下のように分割することによって作ることができる．まず，区間［0，1］の中央を取り除く．次に，残りの2つの区間各々について，中央の1/3を取り除く．この過程を無限に繰り返すことによって，カントール集合が得られる．この操作から，nステップにおけるカントール集合は2^nの分割された区間を持ち，その区間の長さは3^{-n}であることがわかる．従ってこの場合，εは定数で，$\ln 3$である．自由エネルギーは(2.4)式より

$$F(\beta)=\ln 2-\beta\ln 3 \tag{2.12}$$

のように求められる．エントロピー関数及びハウスドルフ次元は，$S(\varepsilon)=\ln 2$，$D_H=\ln 2/\ln 3$となる．

3. 確率測度の乗ったフラクタル

第2章の定式化を，確率測度を持つフラクタルの場合に拡張しよう．n番目の分割で，i番目の球がp_iという測度を持つとする．スケール指数α_iを導入すると，

$$p_i=l_i^{\alpha_i} \tag{3.1a}$$

あるいは（2.1)式を使い，

$$\alpha_i=-\frac{1}{\varepsilon_i}\frac{1}{n}\ln p_i \tag{3.1b}$$

となる．第2章と異なり，ここでは2つのスケール指数εとαの分布を考えなければならない．スケール指数εとαがそれぞれ，εと$\varepsilon+d\varepsilon$，αと$\alpha+d\alpha$の間にあるような球の数を$\Omega(\varepsilon,\alpha)$と書こう．マルチフラクタルに対して$n$が大きい場合には，次のようなスケーリングが成り立つことが期待されよう：

$$\Omega(\varepsilon,\alpha)=\exp(nQ(\varepsilon,\alpha)) \tag{3.2}$$

ここで，$\Omega(\varepsilon,\alpha)$は一般化されたエントロピー関数である（Kohmoto (1988))．

Halsey et al. (1986）に従って，次のような一般化された分配関数を考えよう：

$$\begin{aligned}\Gamma(q,\beta)&=\sum_i p_i^q\,l_i^\beta\\&=\sum_i\exp(-n\varepsilon_i(\alpha_i q+\beta))\end{aligned} \tag{3.3}$$

一般化された自由エネルギー（Kohmoto (1988)）は

$$G(q,\ \beta)=\frac{1}{n}\ln\Gamma(q,\ \beta) \tag{3.4}$$

となり，明らかに

$$\begin{aligned} Z(\beta)&=\Gamma(q=0,\ \beta)\\ F(\beta)&=G(q=0,\ \beta) \end{aligned} \tag{3.5}$$

のような関係があることがわかる．一般化されたエントロピー $Q(\varepsilon,\ \alpha)$ を用いると，(3.3)式は次のように書ける：

$$\Gamma(q,\ \beta)=\int d\varepsilon\int d\alpha\ \exp\left[n(Q(\varepsilon,\ \alpha)-(\alpha q+\beta)\varepsilon)\right] \tag{3.6}$$

(2.5)式と同様に，積分は $Q(\varepsilon,\ \alpha)-(\alpha q+\beta)\varepsilon$ の極値で支配され，(3.4)式は

$$G(q,\ \beta)=Q(\langle\varepsilon\rangle,\ \langle\alpha\rangle)-(\langle\alpha\rangle q+\beta)\langle\varepsilon\rangle \tag{3.7}$$

となる．ここで，$\langle\varepsilon\rangle$ と $\langle\alpha\rangle$ は $Q(\varepsilon,\ \alpha)-(\alpha q+\beta)\varepsilon$ の極大値を与える点である．従って，

$$\left.\frac{\partial Q(\varepsilon,\ \alpha)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\langle\varepsilon\rangle,\ \alpha=\langle\alpha\rangle}=\langle\alpha\rangle q+\beta \tag{3.8}$$

及び

$$\left.\frac{\partial Q(\varepsilon,\ \alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\varepsilon=\langle\varepsilon\rangle,\ \alpha=\langle\alpha\rangle}=\langle\varepsilon\rangle q \tag{3.9}$$

となる．このように $Q(\varepsilon,\ \alpha)$ から $G(\varepsilon,\ \alpha)$ を求めることができる．逆に，$G(\varepsilon,\ \alpha)$ がひとたび求まれば，$\langle\varepsilon\rangle$，$\langle\alpha\rangle$ 及び $Q(\varepsilon,\alpha)$ は

$$\langle\varepsilon\rangle=-\frac{\partial}{\partial\beta}G(q,\ \beta) \tag{3.10}$$

$$\langle\alpha\rangle\langle\varepsilon\rangle=-\frac{\partial}{\partial q}G(q,\beta) \tag{3.11}$$

$$Q(\langle\varepsilon\rangle,\ \langle\alpha\rangle)=G(q,\ \beta)-q\frac{\partial G(q,\ \beta)}{\partial q}-\beta\frac{\partial G(q,\ \beta)}{\partial\beta} \tag{3.12}$$

によって計算することができる．(3.10)式と (3.11)式より，$\langle\varepsilon\rangle$ と $\langle\alpha\rangle$ は

$$\frac{\partial}{\partial q}\langle\varepsilon\rangle=\frac{\partial}{\partial\beta}(\langle\alpha\rangle\langle\varepsilon\rangle) \tag{3.13}$$

により互いに関係づけられている．

エントロピー $S(\varepsilon)$ と一般化されたエントロピーとの関係は

$$\exp\left[nS(\varepsilon)\right]=\int d\alpha\ \exp\left[nQ(\varepsilon,\ \alpha)\right] \tag{3.14}$$

となっている．$Q(\varepsilon,\ \alpha)$ が α に関して極大となるのは $q=0$ のときであるから，$S(\varepsilon)$ は(3.12)式で $q=0$ とすることにより求められる．このことは (3.5)式からも容易に理解できる．

$S(\varepsilon)$ と同様に

$$\exp\left[nS'(\alpha)\right]=\int d\varepsilon\ \exp\left[nQ(\varepsilon,\ \alpha)\right] \tag{3.15}$$

は α に関するエントロピーと考えることができる．$Q(\varepsilon,\ \alpha)$ が ε に関して極大となるのは αq

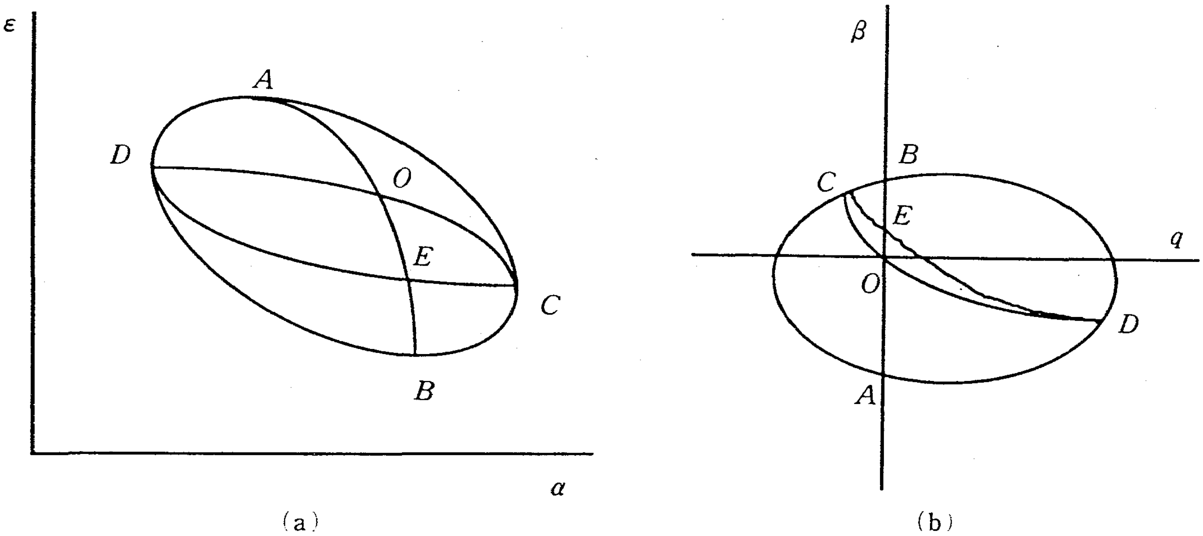

図 1. (a) ε-α 平面における $Q(\varepsilon,\ \alpha)$ の概略図. 一般化されたエントロピー $Q(\varepsilon,\ \alpha)$ は領域 $ACBD$ においてのみ, $Q(\varepsilon,\ \alpha)\neq 0$ である. (b) q-β 平面における Q の概略図. 点 Q, A, B, C, D 及び E は(a)の各点に対応する.

$+\beta=0$ が満たされるときであるから, (3.7)式と (3.15)式から

$$S'(\alpha)=G(q,\ \beta) \tag{3.16}$$

となる. ここで, q と β は

$$q\frac{\partial G(q,\ \beta)}{\partial q}+\beta\frac{\partial G(q,\ \beta)}{\partial \beta}=0 \tag{3.17}$$

の関係を満たし, α は

$$\alpha=-\beta/q \tag{3.18}$$

で与えられる.

図 1 (a) に $Q(\varepsilon,\ \alpha)$ の概略を示す. $Q(\varepsilon,\ \alpha)$ は ε-α 平面のある領域で $Q(\varepsilon,\ \alpha)\neq 0$ である. 曲線 AOB 上で $Q(\varepsilon,\ \alpha)$ は α について極大となり, $S(\varepsilon)=Q(\varepsilon,\ \alpha)$ を与える. q-β 平面でこれに相当する曲線は, 図 1 (b)で $q=0$ である. エントロピー $S'(\alpha)$ は ε について極大値を与える曲線 DOE 上の $Q(\varepsilon,\ \alpha)$ によって与えられる. q-β 平面でこれに相当する曲線は, $\alpha q+\beta=0$ である. 曲線 CED 上では $G(\varepsilon,\ \alpha)=0$ となり, $f(\alpha)$ は

$$f(\alpha)=Q(\varepsilon,\ \alpha)/\varepsilon$$

または

$$f(\alpha)=\partial Q(\varepsilon,\ \alpha)/\partial\varepsilon$$

により, Q から求められる. この曲線は q-β 平面では $\beta=\beta_c(q)$ に相当する. ハウスドルフ次元は $\beta_c(0)$ によって与えられる.

3.1 臨界点

第 2 章で, 臨界値 β_c がハウスドルフ次元を与え, 対応する $\langle\varepsilon\rangle_c$ が代表的なスケール指数を与えることを示した. 今の場合, β の臨界値は q に依存し,

(3.19) $$G(q,\ \beta_c(q))=0$$

となる．$\beta_c(q)$は一般化された次元の集合とみなすことができる．$\beta_c(q)$に対応するスケール指数$\langle\varepsilon\rangle_c$は，$q$のある特別な値に対して代表的なスケール指数と考えられる．(3.7)式，(3.8)式及び（3.19)式より$Q(\langle\varepsilon\rangle,\ \langle\alpha\rangle)$は臨界点で

(3.20) $$Q(\langle\varepsilon\rangle_c,\ \langle\alpha\rangle_c)=\left.\frac{\partial Q(\langle\varepsilon\rangle_c,\ \langle\alpha\rangle_c)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\langle\varepsilon\rangle_c}\langle\varepsilon\rangle_c$$

の関係を満たすことがわかる．この微分方程式を解けば，

(3.21) $$Q(\langle\varepsilon\rangle_c,\ \langle\alpha\rangle_c)=\langle\varepsilon\rangle_c f(\langle\alpha\rangle_c)$$

を得る．ここで$f(\langle\alpha\rangle_c)$は

(3.22) $$f(\langle\alpha\rangle_c)=\left.\frac{\partial Q(\langle\varepsilon\rangle_c,\ \langle\alpha\rangle_c)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\langle\varepsilon\rangle_c}$$

により与えられる．(3.22)式を（3.8)式と（3.9)式に代入すれば，

(3.23) $$f(\langle\alpha\rangle_c)=\langle\alpha\rangle_c q+\beta_c(q)$$

及び

(3.24) $$\left.\frac{df(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=\langle\alpha\rangle_c}=q$$

が得られる．さらに（3.23)式，(3.24)式から

(3.25) $$\langle\alpha\rangle_c=-\frac{d\beta_c(q)}{dq}$$

を得る．このように(3.19)式を解くことにより$\beta_c(q)$がひとたび求まれば，$\langle\alpha\rangle_c$及び$f(\langle\alpha\rangle_c)$は（3.23）式，(3.25）式から計算することができる．$f(\alpha)$を用いると，球の数$\Omega(\varepsilon,\ \alpha)$は，(3.2)式，(3.21)式から次のように表される：

(3.26) $$\Omega(\varepsilon,\ \alpha)=\exp\left[n\langle\varepsilon\rangle_c f(\langle\alpha\rangle_c)\right]$$
$$=\langle l\rangle_c^{-f(\alpha)}$$

ここで，$\langle l\rangle_c=\exp(-n\langle\varepsilon\rangle_c)$は代表的な長さである．(3.26)式を(2.11)式と比較すれば，$f(\alpha)$（Halsey et al. (1986)）が一般化された次元の集合と考えられることが理解できよう．

4. まとめ

フラクタルのトポロジカルな性質のみを考える場合には，完全に統計力学のカノニカル分布と対応する定式化が可能である．ところが，フラクタル上の確率分布を考える場合には，それを一般化し，2つのスケーリング指数α，εに関する統計力学的定式化を必要とする．この場合，いわゆる$f(\alpha)$関数だけではフラクタルを特徴づけるには不完全である（特別な場合のみ，すなわち確率分布を一定にする分割，またはルベーグ測度を一定にする分割の場合は簡単になり，たまたまフラクタルのスケーリング性を特徴づけるのに$f(\alpha)$で十分である)．このような事情を理解する研究者はまだ非常に少なく，単に$f(\alpha)$を計算するか，または不完全な統計力学との類推を追求しているのが現状である．この意味で，この分野はさらに発展する可能性を持っている．

参 考 文 献

Halsey, T.C., Jensen, M.H., Kadanoff, L.P., Procaccia, I. and Shraiman, B.I. (1986). Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets, *Phys. Rev. A*, **33**, 1141-1151.
Kohmoto, M.(1988). Entropy function for multifractals, *Phys. Rev. A*, **37**, 1345-1350.
Landau, L.D. and Lifshitz, E.M. (1969). *Statistical Physics*, Pergamon, Oxford.
Mandelbrot, B.B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York.